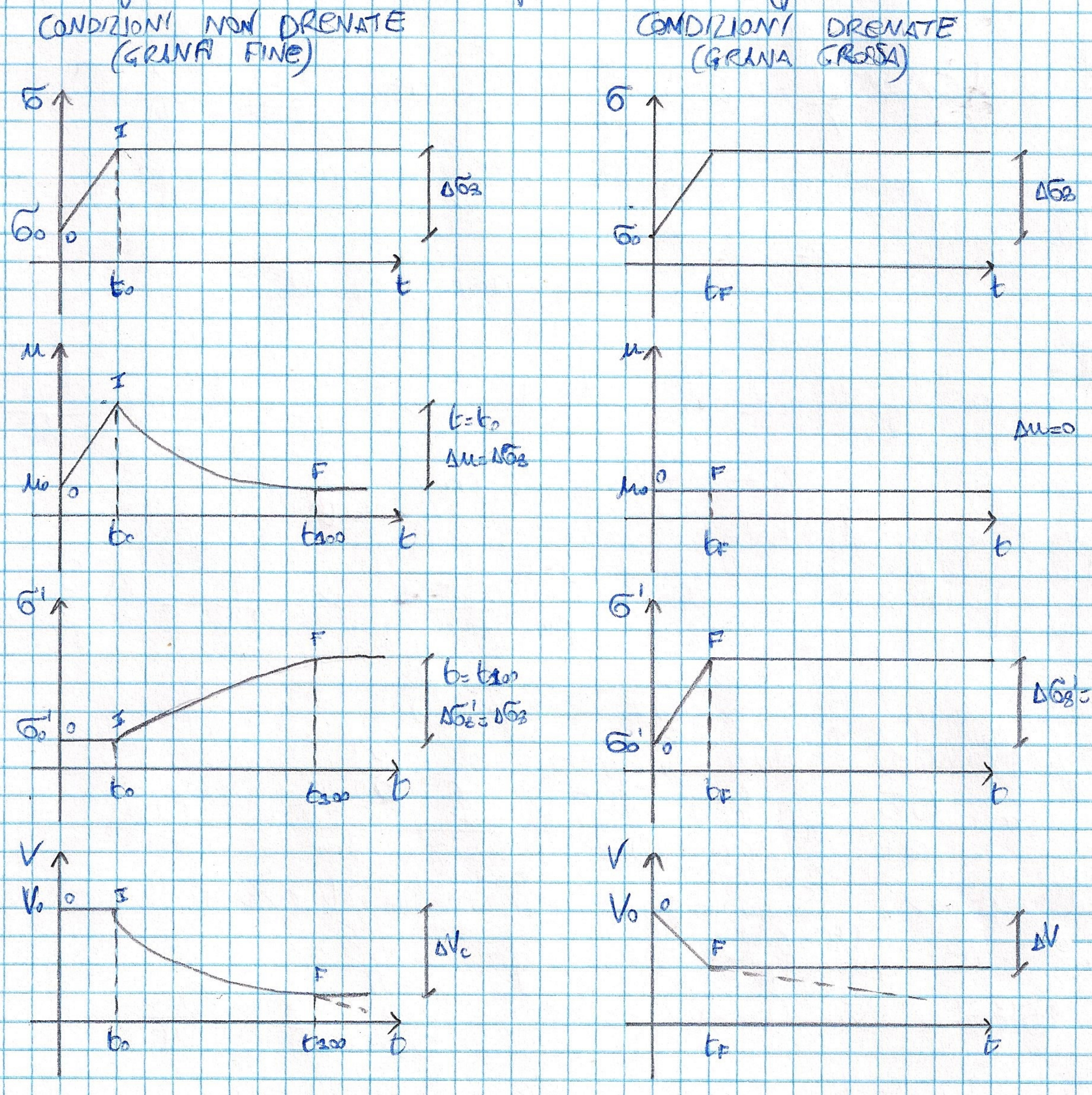
La consolidazione monodimensionale

Con il termine "consolidazione" si intende il processo successivo all'applicazione di un sovraccarico su un terreno. In particolare per la condizione non drenata il processo di consolidazione consiste nella dissipazione delle sovrappressioni interstiziali Δu. Il lungo tempo da questa richiesto è dovuto alla bassissima permeabilità tipica dei terreni a grana fine. Variabile fondamentale è dunque il tempo.

Si parla di consolidazione tipicamente per i terreni a grana fine. I terreni a grana grossa raggiungono infatti velocemente lo stato finale (subito dopo l'applicazione del carico). Lo si nota dal seguente confronto grafico degli andamenti temporali delle grandezze coinvolte!



Il processo di consolidazione fornisce al terreno maggiore resistenza e minore deformabilità. La valutazione tem-

porale delle grandezze di interesse ingegneristico può essere condotta grazie alla teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi.
Eccone le ipotesi:
- terreno omogeneo e saturo;
- fluido e solido incomprimibili;
- analogia di comportamento tra un volume finito di terreno e un elemento infinitesimo dello stesso;
- applicabilità di legge di Darcy e principio degli sforzi efficaci;
- flusso d'acqua e deformazioni monodimensionali;
- linearità tra σ e ε nell'intervallo tensionale di interesse;
- coefficiente di conducibilità idraulica k costante.

Le ipotesi ci consentono di applicare le seguenti formule:
- per le deformazioni:

$$d\varepsilon_v = \frac{dV}{V} = d\varepsilon_z = -\frac{dl}{dz} \qquad m_v = \frac{d\varepsilon_z}{d\sigma_z'} = \frac{1}{M}$$

$$a_v = -\frac{de}{d\sigma_z'} = (1+e)\cdot m_v$$

Da cui:

$$dl = -m_v \cdot d\sigma_z' \cdot dz$$

- per la continuità:

$$dx \cdot dy \cdot dl = A \cdot dl = -dq \cdot dt \Rightarrow \frac{dq}{dz} = A \cdot m_v \cdot \frac{d\sigma_z'}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial z} = A \cdot m_v \cdot \frac{\partial \sigma_z'}{\partial t}$$

- per la legge di Darcy:

$$q = A \cdot k \cdot i \qquad i = -\frac{1}{\gamma_m}\frac{du}{dz} \Rightarrow \frac{dq}{dz} = -A\cdot\frac{k}{\gamma_m}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial z} = -A\cdot\frac{k}{\gamma_m}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Uguagliando le due espressioni di $\frac{\partial q}{\partial z}$:

$$m_v \cdot \frac{\partial \sigma_z'}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_m}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{k}{m_v \cdot \gamma_m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial \sigma_z'}{\partial t}$$

Battezziamo $\frac{k}{m_v \gamma_w} = c_v$, coefficiente di consolidazione e applichiamo il principio degli sforzi efficaci:

$$\sigma_z' = \sigma_z - (u_0 + u) \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z'}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Infatti $u_0 = \text{cost}$ e $\sigma_z = \text{cost}$. Ecco alfine l'equazione di consolidazione monodimensionale:

$$c_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Vi sono grafici che riportano la soluzione grafica dell'equazione di consolidazione monodimensionale in funzione di tre parametri:

- fattore tempo adimensionale:

$$T_V = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$$

- grado di consolidazione:

$$U_z = \frac{\bar{u}_0 - \bar{u}(z,t)}{\bar{u}_0} = 1 - \frac{\bar{u}(z,t)}{\bar{u}_0}$$

- profondità adimensionalizzata con l'altezza dello strato (H per un solo contorno drenante, 2H per due contorni drenanti):

$$Z = z/H$$

Una volta noto $U_z(T_v, Z)$ si ottiene $\bar{u} = u_0 + \bar{u}_0(1 - U_z)$ ed è possibile valutare la tensione efficace:

$$\sigma_z'(z,t) = \sigma_z(z) - u(z,t) = [\sigma_{z0}(z) + \Delta\sigma_z(z)] - [u_0(z) + \bar{u}(z,t)]$$

La soluzione grafica è costituita da curve dette "isocrone" che rappresentano l'andamento delle sovrappressioni al variare di z e t. Isocrona è pure la curva che indica il valore di $\bar{u}$ al variare della profondità ad un certo tempo.

Quando gli sforzi si trasferiscono dalla fase fluida alla fase solida il terreno subisce degli assestamenti. Per un terreno secco o in condizioni drenate essi sono immediati, cioè si verificano subito dopo l'applicazione del carico. In condizioni non drenate si ha invece un cedimento immediato seguito da quello di consolidazione che si sviluppa in un tempo molto più lungo. Per la valutazione del cedimento finale si ricorre alla seguente formula:

$$S_\infty = \int_0^D \varepsilon(z,t_\infty) \cdot dz \Rightarrow S_\infty = m_v \cdot \Delta\sigma_z' \cdot D = m_v \cdot \Delta\sigma_z \cdot D$$

Introduciamo ora il grado di consolidazione medio U_m (valore medio di U_z nello strato) al tempo t:

$$U_m = 1 - \frac{\text{sovrappressione media in D al tempo t}}{\text{sovrappressione iniziale media in D}} = 1 - \frac{1/D \int_0^D \bar{u}(z,t)\,dz}{1/D \int_0^D \bar{u}_0(z,t_0)\,dz} = 1 - \frac{\int_0^D \bar{u}(z,t)\,dz}{\int_0^D \bar{u}(z,t_0)\,dz}$$

Torniamo a:

$$-\frac{\partial \sigma_z'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \qquad m_v = \frac{d\varepsilon_z}{d\sigma_z'} \Rightarrow m_v = -\frac{d\varepsilon_z}{d\bar{u}}$$

Otteniamo:

$$\frac{\varepsilon(z;t_0) - \varepsilon(z;t_\infty)}{\bar{u}_0 - \bar{u}(z;t_\infty)} = \frac{\varepsilon(z;t_0) - \varepsilon(z;t)}{\bar{u}_0 - \bar{u}(z;t)}$$

Ma $\varepsilon(z;t_0)=0$, $\bar{u}(z;t_\infty)=0$:

$$\frac{\varepsilon(z;t_\infty)}{\varepsilon(z;t)} = \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}_0 - \bar{u}(z;t)} \Rightarrow \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_\infty} = 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} = U_m$$

Essendo $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_\infty} = \frac{S_t}{S_\infty} = U_m$ si ottiene:

$$S_t = U_m(t) \cdot S_\infty$$

U_m si ottiene in tabelle in funzione di T_v. Per $U_m < 0,6$ vale la relazione (approssimativa):

$$U_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{T_v}$$

Graficamente si possono ottenere i cedimenti calcolando l'area sottesa dalle isocrone.

Quanto abbiamo visto è basato sull'ipotesi di sovraccarico infinitamente esteso, che in realtà non esiste. Il cedimento finale S_∞ viene quindi opportunamente ridotto con un fattore di correzione μ compreso tra zero e uno:

$$S_c = \mu \cdot S_\infty$$

Assume valori tra 0,85 e 0,95 per argille NC, tra 0,3 e 0,5 per argille OC.